$$\left.\begin{array}{l} OB = |3+i-0| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \\ AC = |i-3| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow OB=AC \quad (2)$$

Conclusion : (1) et (2) donnent que OABC est un rectangle.

2)a- $f : P \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = (1+i)z - 3i$

Comme $z' = az + b$ avec $a = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b=-3i$ alors f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{-3i}{1-1-i} = 3 = aff(A)$.

b- $\otimes \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ car OABC est un parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{C'B'}$ (3) car f conserve l'équipollence

$\oplus (OA) \perp (OC)$ car OABC est un rectangle

$\Rightarrow (O'A) \perp (O'C')$ (4) car f conserve l'orthogonalité.

Ainsi: (3) et (4) $\Rightarrow$ O'AB'C' est un rectangle.

PROBLEME

A]1/a- φ_n est une fonction dérivable sur IR_+^* (somme des fonctions dérivables). $\forall x \in IR_+^*, \varphi_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

D'où le tableau de variation de φ_n

x	0	$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	+	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{+\infty} \varphi_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[n\text{Log}x + 1 - \frac{1}{x} \right] = +\infty$.
- $\lim\limits_{0^+} \varphi_n = \lim\limits_{x\to0^+} \left[\frac{1}{x}(n.x\text{Log}x - 1) + 1 \right]$
  $= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} (x\text{Log}x) = 0$

b- $\varphi_n(1) = n\text{Log}1 + 1 - \frac{1}{1} = 0$.

$\otimes \forall x \in]0;1]$ on a $\varphi_n(x) \le \varphi_n(1) = 0$ car φ_n ↗ sur $]0;1]$.

$\otimes \forall x \in [1;+\infty[$ on a $\varphi_n(x) \ge \varphi_n(1) = 0$ car φ_n ↗ sur $[1;+\infty[$.

2/a- f_n est une fonction dérivable sur IR_+^* (produit des fonctions dériv.)

$\forall x \in IR_+^*, f_n'(x) = n(x-1)^{n-1}\text{Log}x + (x-1)^n \frac{1}{x}$

$= (x-1)^{n-1}\left[n\text{Log}x + (x-1)\frac{1}{x} \right] = (x-1)^{n-1}\varphi_n(x)$.

- **1ier cas** : n paire $\Rightarrow$ n-1 impaire $\Rightarrow sig\left[(x-1)^{n-1}\right] = sig[x-1]$

Par suite $sig[f_n'(x)] = sig[(x-1)\varphi_n(x)]$